Manfred Zimmermann

Wahrheit und Wissen in der Mathematik

Das Benacerrafsche Dilemma

transparent verlag berlin

Wer eine bedeutungsvolle Mathematik wünscht, muss der Gewissheit entraten. Wer Gewissheit wünscht, muss die Bedeutung beiseiteschieben. Man kann nicht beides zugleich haben.
Imre Lakatos

Der Mathematiker ist der eigentliche 'Platoniker' im gängigen Sinne des Wortes. Er - und nur er - ist durch eine Einstellung charakterisiert, der eine Zweiweltenvorstellung entspricht und die es ihm nahelegt, den Hypothesencharakter seiner Voraussetzungen zu verkennen und in ihnen gegenständliche Elemente einer höheren Wirklichkeitsstufe zu sehen.
Wolfgang Wieland: Platon und die Formen des Wissens

1. Auflage Berlin 1995
Fotos Manfred Zimmermann
ISBN 3-927055-05-0

Gesamtherstellung und Vertrieb:
H. & E. Preuß, Reichenberger Str. 28, 10999 Berlin

INHALT

1	**EINLEITUNG**	5
2	**DAS BENACERRAFSCHE DILEMMA**	10
3	**PHILOSOPHISCHE HINTERGRÜNDE**	16
3.1	Wahrheit, Wissen und die Sonderstellung der Mathematik	16
3.1.1	Wahrheit	17
3.1.2	Wissen	20
3.1.3	Die Sonderstellung der Mathematik	24
3.2	Vorgeschichte des Benacerrafschen Dilemmas	25
3.2.1	Euklids „Elemente" und die Folgen	25
3.2.2	Die sog. Grundlagenkrise	26
3.2.3	Tendenzen in der gegenwärtigen Philosophie	31
	a) Semantische Wahrheitstheorie von Tarski	31
	b) Holismus von Quine	34
3.3	Der Dualismus von Benacerraf und Davidsons Philosophie der Interpretation	36
3.3.1	„Standardsicht" und „kombinatorische Sicht", Platonismus und Formalismus	37
3.3.2	Vermeidung des Dualismus bei Davidson	26
4	**DIE POST-BENACERRAFSCHE DISKUSSION**	46
4.1	Überblick über die Diskussion	47
4.2	Das Dilemma als Scheinproblem	49
4.2.1	Mathematik als „Spiel" (Wittgenstein)	49
4.2.2	Mathematik als fehlbare Wissenschaft (Lakatos)	51
4.2.3	Mathematik als Tautologie (Rota)	53
4.3	Das Dilemma als Antinomie (Hart)	55
4.4	Mathematik ohne Gegenstände	56
4.4.1	Mathematik als Wissenschaft möglicher Strukturen (Putnam)	56
4.4.2	Verzicht auf den Begriff der Wahrheit (Field)	57
4.4.3	Mathematik als Tätigkeit (Hossack)	59
4.5	Modifizierungen des Platonismus	64
4.5.1	Mathematik als Wissenschaft von Strukturen (Resnik)	64
4.5.2	Post-Benacerrafsche Probleme (Maddy)	66

4.6 Holistischer Ansatz (Tymoczko) 69
4.7 Bemerkungen zur post-Benacerrafschen Diskussion 72

5 SCHLUSSBEMERKUNG 74

6 ANHANG 78

6.1 Paul Benacerraf: Mathematical Truth (Übersetzung) 78
6.2 Kleines Lexikon 99

7 LITERATURVERZEICHNIS 109

7.1 Reader 109
7.2 Einzeltitel 110

8 REGISTER 124

1 EINLEITUNG

Ist es nicht eine unnütze Beschäftigung, sich Gedanken über die Mathematik zu machen? Ist dort nicht alles klar? Mathematik ist doch - zum Glück gibt es überhaupt noch eine - die einzige Wissenschaft, wo es objektiv wahre/gültige Aussagen gibt und Verfahren, sie unumstößlich zu beweisen. Und darin sind sich die meisten Mathematiker und Nichtmathematiker einig. Die Autorität der Mathematik ist unangefochten. Man mag einwenden, dass das daran liegt, dass viele in der Schule schlechte Erfahrungen mit Mathematik gemacht haben (Versagenserfahrungen), aber der Respekt wird durch die Angst eher noch vergrößert. Außerdem überzeugt Mathematik durch ihr „Funktionieren", ihre Anwendbarkeit. Die Aussage Galileis aus dem Jahre 1623 scheint immer noch gültig zu sein: „Es [das Universum] ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, deren Buchstaben Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren sind; ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen." Die gesellschaftlich unangefochtene Stellung der Mathematik schützt die Mathematiker vor Rechtfertigungs- und Argumentationsdruck. Unter diesen Vorzeichen haben die Fragen „Sind die Aussagen der Mathematik wahr?" und „Wodurch ist das mathematische Wissen begründet?" einen ketzerischen Charakter.

In krassem Gegensatz zu diesem Bild steht die Hilflosigkeit von Wissenschaftstheoretikern und Philosophen, die versuchen, das „Phänomen" Mathematik zu erklären.

Nähert man sich der Mathematik aus einem philosophischen Interesse heraus, so stellen sich zahlreiche Fragen, wie z.B.:

1. *Frage nach dem Gegenstand*

Mit was beschäftigt sich die Mathematik? Was ist der Gegenstand der Mathematik? Die naheliegende Antwort „Zahlen, geometrische Figuren und Verknüpfungen/Operationen zwischen ihnen" oder die Antwort des Mathematikers „Mengen und Strukturen" bleiben unbefriedigend; Zahlen, geometrische Figuren und Mengen sind keine Gegenstände unserer Welt, da sie weder eine Ausdehnung noch andere sinnliche Eigenschaften haben. Die Gegenstände der Mathematik scheinen aus einer anderen Welt zu stammen, und doch stehen wir vor dem Phänomen, dass Sachverhalte und Prozesse in Natur und Gesellschaft mit ihrer Hilfe beschrieben und vorhergesagt werden können.

2. *Frage nach den Methoden*

Mit welchen Methoden arbeitet die Mathematik? Diejenigen, die Mathematik anwenden, werden sagen „Rechnungen", Mathematiker „Beweise". Reicht es als Rechtfertigung für Rechenmethoden zu sagen, sie funktionierten? Warum bestehen Mathematiker dann auf Beweisen? Wann ist etwas bewiesen? Beweise sind an Schule und Universität mit einer besonderen Aura umgeben und scheinen etwas Geheimnisvolles zu sein: Der Abschluss eines Beweises befriedigt Nichtmathematiker, wie z.B. SchülerInnen, wenig und lässt mehr Fragen offen („Was war das?"), als er beantwortet.

Außerdem bringt das Ritual der Beweisführung für Nichtmathematiker verschiedene Schwierigkeiten und Ungereimtheiten mit sich:
1) Auch Mathematiker können nur unbefriedigend erklären, welche Kriterien ein Beweis erfüllen muss. Es gibt in der mathematischen Zunft einen gewissen Konsens, der stärker an ästhetischen Kriterien als an Logik orientiert zu sein scheint. Der Beweis soll kurz, überschaubar, elementar usw. sein. Auch bei längst bewiesenen Sätzen wird so lange nach neuen Beweisen gesucht, bis diese Ansprüche befriedigt sind.
2) Der „Laie" fragt sich auch, was an einem Beweis interessant ist, wenn ein Satz bewiesen wurde. Sind dann nicht Konsequenzen und Anwendungen wichtiger? Das Mathematikstudium besteht aber im wesentlichen darin, Beweise zu wiederholen, die schon unzählige Male, z.T. schon von Generationen von Mathematikstudenten nachvollzogen

wurden. Eine Erklärung dafür ist, dass kein Beweis je über alle Kritik erhaben ist, sondern sich immer wieder der Kritik aussetzen muss.
3) Im Mittelpunkt des Beweises steht oft eine Idee (man hat sie oder man hat sie nicht). Kann man Beweise lernen?
4) Das Werkzeug der Beweise sind die logischen Gesetze, die in der Schule gar nicht und an der Universität nur in sehr rudimentärer Form Gegenstand der Ausbildung sind.
5) Beweise führen Sätze immer nur auf andere Sätze zurück („Unendlicher Regress"; was ist damit gewonnen?).

3. *Ist Mathematik eine Erfindung oder eine Entdeckung?*

Descartes sagte: „Wer Mathematik treibt, erfindet eine Ordnung. Sie ist kein von Ewigkeit her geschriebenes Gesetz." Dies steht im Widerspruch zu dem am Anfang beschriebenen Image der Mathematik und dem Sprachgebrauch der Mathematiker, nach dem mathematische Gesetze unabhängig vom Menschen existieren, ewig und unveränderlich sind, also „gefunden" oder „entdeckt" werden. Der Standpunkt der „Entdekkung" wirft zahlreiche Fragen auf: Wo existieren diese Gesetze dann? Durch welche Fähigkeiten haben wir Zugang zu diesen Gesetzen? Sind die Mathematiker „Medien", die wie Wünschelrutengänger sinnlich unzugängliche Wahrheiten aufspüren? Ist Mathematik eine Wissenschaft oder eine Disziplin der Esoterik? Wird dagegen die Mathematik als Erfindung verstanden, dann ist sie Menschenwerk, mit menschlichen Unvollkommenheiten behaftet, in gewisser Weise willkürlich, und ihr Bezug zur Wirklichkeit nicht so leicht erklärbar.

4. *Was ist „Verstehen" in der Mathematik?*

Für Lehrende und Lernende stellt sich immer wieder die Frage: Wann hat man Mathematik verstanden? Soll der Schulunterricht ein Miniatur-Abbild des Universitätsstudiums sein, in dem Mathematik axiomatisch verstanden wird, d.h. dass die Aussagen - ganz im Sinne Euklids (s.S.27) - aus einigen Grundaussagen (Axiomen) hergeleitet werden? Dann müsste der Unterricht im wesentlichen formal orientiert sein, und Logik müsste eine zentrale Rolle spielen. Oder ist Mathematik eine Wissenschaft - im Sinne Kants - , die sich im Raum der reinen Anschauung/Vorstellung bewegt? Dann müsste vor allem die „anschauliche" Interpretation mathematischer Begriffe und Aussagen geübt werden. Oder ist - im Sinne Wittgensteins - Mathematik ein Regelwerk, das man dann verstanden hat, wenn man die Regeln möglichst oft anwendet und dadurch in der Anwendung Sicherheit gewinnt?

Der traditionelle Mathematikunterricht wirkt wie ein Gemisch aus allen diesen Positionen, wobei das „Gewissen" der MathematiklehrerInnen auf das axiomatische Denken der universitären Mathematik fixiert zu sein scheint und die anderen Möglichkeiten (z.B. Schulung der Anschauung, Lösen von Aufgben) allenfalls als didaktische Zugeständnisse angesehen werden.

Zur näheren Beschäftigung mit diesen und vielen anderen Fragen ist es hilfreich, zunächst einmal zu klären, was unter Wahrheit und Wissen in der Mathematik zu verstehen ist.

Obwohl diese Frage seit 150 Jahren heftig diskutiert wird, hat sie 1973 einen neuen Anstoß erhalten, als der amerikanische Philosophie-Professor Paul Benacerraf (Princeton University) auf einem Symposium zu dem Thema „Mathematische Wahrheit" ein später nach ihm benanntes Dilemma vorgetragen hat, das seitdem im Zentrum der Diskussion über Philosophie der Mathematik steht.

Dieses Dilemma ist u.a. aus drei Gründen von großem Interesse:

1. Es hat eine seitdem nicht mehr abbrechende Diskussion in der Philosophie der Mathematik ausgelöst, die in mancher Hinsicht an die sog. Grundlagenkrise der Jahrhundertwende (s.S.28) erinnert. Allerdings findet diese Diskussion weniger unter Mathematikern als unter Philosophen statt.
2. Durch diese Diskussion hat die Philosophie der Mathematik eine „Renaissance" (Irvine 1990) erlebt, die die Resignaton und den Pragmatismus, der nach der Ausweglosigkeit der Grundlagenkrise vorherrschten, ablöste.
3. In diesem Dilemma fließen zentrale Themen der heutigen philosophischen Diskussion zusammen: Realismus und Nominalismus, Rationalismus und Empirismus, Wissen und Wahrheit. Außerdem ist der Versuch, die Bedingungen für Wahrheit und die Rechtfertigung unseres Wissens in einer einheitlichen Theorie zusammenzubringen, ein klassisches Thema der Philosophie, das auch heute noch nicht befriedigend gelöst ist. So sagte Putnam 1986: Es ist die Zeit für ein „Moratorium über Ontologie und Epistemologie" gekommen (Putnam 1993, S.218). Gerade in der Philosophie der Mathematik haben sich viele metaphysische Illusionen gehalten, die in der übrigen Philosophie längst problematisch geworden sind (ganzheitliche Erklärung für Wahrheit, Referenz und Wissen; Letztbegründung). In der Diskussion über das Benacerrafsche Dilemma ist die Philosophie der Mathematik mit den zeitgenössischen Problemen der Philosophie verbunden.

Ich werde in dieser Arbeit zunächst die Grundproblematik des Benacerrafschen Dilemmas darstellen. Diese Vorgehensweise mag wie ein Sprung ins tiefe Wasser wirken, sie hat aber den Vorteil, dass sie das zentrale Problem benennt, auf das im folgenden unter verschiedenen

Aspekten zurückgegriffen werden kann: Welche philosophischen Probleme sind mit den Begriffen von Wahrheit und Wissen verbunden? Welche Sonderstellung nimmt die Mathematik dabei ein? Was ist das Besondere dieses Dilemmas, da Wahrheit und Wissen sicher nicht erst im Jahre 1973 zu einem Problem wurden? Gibt es Lösungsansätze des Problems?

Ich sehe die Berechtigung dieses Buches vor allem darin, dass es bisher keine zusammenhängende Darstellung in deutscher Sprache gibt. Weder ist der Vortrag von Benacerraf bisher übersetzt, noch ist die Diskussion dieser Themen, die in der angelsächsichen Literatur mit einigem Interesse verfolgt wird, in Deutschland populär. Die Philosophie der Mathematik führt bei uns ein relatives Schattendasein. Das „Land der Dichter und Denker" ruht sich auf den Lorbeeren der Vergangenheit aus. Die essayistische Kultur der Reflexion und Kritik außerhalb von Deutschland hat hier immer noch wenig Freunde. Außerdem nehme ich das Benacerrafsche Dilemma als Aufhänger, um klassische Positionen der Philosophie der Mathematik darzustellen und eine Einführung in zentrale Begriffe der gegenwärtigen analytischen Philosophie zu geben.

Für Anregungungen und Unterstützung bei der Arbeit an diesem Thema danke ich vor allem
Dr. Lorenz Wernisch, der „grauen Eminenz" dieses Buches, der mir bei allen Fragen und Problemen kritisch und hilfreich zur Seite stand und Korrektur las,
und außerdem
Dr. Thomas Mormann, der mich für das Thema interessierte,
Prof. Hans Poser für die Ermutigung und
Ilse Blum für die Unterstützung bei der Übersetzung des Artikels von Paul Benacerraf.

2 DAS BENACERRAFSCHE DILEMMA

Paul Benacerraf beginnt seinen Vortrag über mathematische Wahrheit (1973) mit einer idealtypischen Konstruktion. Er behauptet, dass alle Theorien der mathematischen Wahrheit und des mathematischen Wissens auf zwei Modelle reduziert werden können, die in komprimierter Form folgendermaßen lauten:

DAS DILEMMA (kurzgefasst):

> Die Bedingungen für Wahrheit und Wissen schließen sich gegenseitig aus. Entweder haben mathematische Sätze eine Bedeutung, dann bleibt die Gewissheit mathematischer Erkenntnis unerklärlich, oder man rettet die Sicherheit mathematischer Aussagen, die sich auf formale Beweise stützt, dann muss man auf Bedeutung und Wahrheit verzichten.